

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

1) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 4 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

con il metodo di Cramer e confrontare che la soluzione trovata è esatta utilizzando il metodo della matrice inversa.

Metodo di Cramer

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 - 16 - 4 - 12 + 6 = -15 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \det A = -15$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diverso da zero, ne segue che il sistema dato, secondo il Teorema di Cramer, ammette una ed una sola soluzione ricavabile dalle ben note formule di Cramer. Precisamente risulta:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

avendo indicato con:

Δ il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema, ovvero il $\det A$;

Δ_x il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti;

Δ_y il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti;

Δ_z il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della z con la colonna dei termini noti.

Ma allora segue:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 - 40 - 0 - 24 + 15 = -45 \Rightarrow \Delta_x = -45$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{-3} & \overset{z}{4} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_y = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{N}{4} & \overset{z}{4} \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 12 + 0 - 20 + 0 - 8 = -30 \Rightarrow \Delta_y = -30$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{-3} & \overset{z}{4} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_z = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{-3} & \overset{N}{4} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 16 - 4 + 20 + 0 = -15 \Rightarrow \Delta_z = -15$$

Quindi si ha:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{-45}{-15}, \frac{-30}{-15}, \frac{-15}{-15} \right) = (3, 2, 1)$$

cioè:

$$(x, y, z) = (3, 2, 1)$$

Metodo della matrice inversa

Poiché, per quanto visto precedentemente, risulta $\det A = \Delta = -15 \neq 0$, segue che la matrice A ammette l'inversa A^{-1} che occorre ora determinare con uno dei due metodi ben noti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa di A utilizzando il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* . Risulta:

$$\begin{array}{lll} c_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5; & c_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; & c_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \\ c_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5; & c_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; & c_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; \\ c_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5; & c_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 14; & c_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \end{array}$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -5 & -2 & 14 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -5 & -2 & 14 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{14}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{8}{15} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{14}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$X = A^{-1}N \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{14}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{8}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 0 \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 0 \\ \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione trovata, operando sia con Cramer che con la matrice inversa, è la medesima.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

2) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 2 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 - 0 + 5 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = \det A = 0$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è uguale a zero, ne segue che il sistema dato non è risolubile utilizzando il Teorema di Cramer, motivo per cui bisogna andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3 \Rightarrow \det A = \Delta = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

Poiché:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

ne segue che è:

$$r(A) = 2$$

in quanto esiste un minore del secondo ordine, estraibile da A , diverso da zero.

Occorre ora controllare il rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice A con l'aggiunta della colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Precisamente:

$$M' = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 2 - 0 - 0 = 0$$

Poiché entrambi i minori orlati del terzo ordine sono nulli, ne segue proprio che:

$$r(AN) = 2$$

cioè:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Dunque il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 3$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y e z) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 2 \\ x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , e non quelli della z , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la z . Ne segue, quindi, posto $z = t$ parametro reale:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 + 5t \\ x + y = 1 + 4t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2+5t & 2 \\ 1+4t & 1 \end{vmatrix} = 2+5t-2-8t = -3t \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = -3t$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2+5t \\ 1 & 1+4t \end{vmatrix} = 3+12t-2-5t = 7t+1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = 7t+1$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

da cui si ricava:

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{-3t}{1}, \frac{7t+1}{1} \right) = (-3t, 7t+1)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z) = (-3t, 7t+1, t)$$

con t parametro reale ($t \in \mathbb{R}$).

3) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 5y - z - 4w = 1 \\ 2x + 10y - 2z - 8w = 2 \\ 3x + 15y - 3z - 12w = 3 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, osservare che il sistema dato è rettangolare (il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite): è, infatti, 3×4 (3 equazioni e 4 incognite). Bisogna allora andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -4 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \\ 3 & 15 & -3 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 10 = 10 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 10 & -2 \\ 3 & 15 & -3 \end{vmatrix} = -60 - 30 - 30 + 30 + 60 + 30 = 0$$

$$M'' = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -8 \\ 3 & 15 & -12 \end{vmatrix} = -240 - 120 - 120 + 120 + 240 + 120 = 0$$

Poiché tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, segue:

$$r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Consideriamo adesso la matrice completa ottenuta da A aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 10 & -2 & -8 & 2 \\ 3 & 15 & -3 & -12 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Occorre determinare ora il rango di AN . Sempre per il Teorema degli Orlati si può partire da un minore del secondo ordine diverso da zero estraibile dalla matrice AN . Sia esso:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 10 = 10 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

Due orlati di tali minori sono stati già calcolati in precedenza quando si è determinato il rango della matrice incompleta, precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 10 & -2 \\ 3 & 15 & -3 \end{vmatrix} = -60 - 30 - 30 + 30 + 60 + 30 = 0$$

$$M'' = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -8 \\ 3 & 15 & -12 \end{vmatrix} = -240 - 120 - 120 + 120 + 240 + 120 = 0$$

Resta allora da calcolare l'ultimo minore orlato ottenuto aggiungendo la quarta colonna e la terza riga:

$$M''' = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \end{vmatrix} = 60 + 30 + 30 - 30 - 60 - 30 = 0$$

Poiché anche in questo caso tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, si può affermare che è

$$r(AN) = 2$$

Dunque:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Ne segue che il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 4$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y , z e w) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da due parametri.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 10 = 10 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 2x + 5y - z - 4w = 1 \\ 2x + 10y - 2z - 8w = 2 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , non quelli della z e della w , bisogna considerare come parametri proprio le incognite trascurate, cioè la z e la w . Ne segue, quindi, posto $z = h$ e $w = k$ parametri reali:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 + h + 4k \\ 2x + 10y = 2 + 2h + 8k \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 10 = 10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 10$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1+h+4k & 5 \\ 2+2h+8k & 10 \end{vmatrix} = 10 + 10h + 40k - 10 - 10h - 40k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1+h+4k \\ 2 & 2+2h+8k \end{vmatrix} = 4 + 4h + 16k - 2 - 2h - 8k = 2h + 8k + 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = 2h + 8k + 2$$

da cui si ricava:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{0}{10}, \frac{2h+8k+2}{10} \right) = \left(0, \frac{h+4k+1}{5} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z, w) = \left(0, \frac{h+4k+1}{5}, h, k \right)$$

con h e k parametri reali ($h, k \in \mathbb{R}$).

4) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Poiché si è in presenza di un polinomio di quarto grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di polinomi di primo o di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, ovvero 2, sono esattamente ± 1 , ± 2 , essendo 2 un numero primo. Ma allora si ha:

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x=+2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = -8 + 8 - 2 + 2 = 0$$

cioè per $x=+2$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & -1 & +2 \\ +2 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x-2)(-x^2-1) = (x-2)\left[-(x^2+1)\right] = -(x-2)(x^2+1)$$

Osserviamo adesso che non è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = x^2 + 1$$

in quanto, come somma di due quadrati, risulta sempre diverso da zero, motivo per cui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ammette alcuna soluzione nell'insieme dei numeri reali.

Dunque:

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = -(x-2)(x^2+1)$$

Risulta ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^3 + 2x^2 - x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 2)$$

è il punto di intersezione
della funzione con l'asse y

sostituendo, in y, al
posto della x il valore 0

Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -x^3 + 2x^2 - x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -(x-2)(x^2+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-2 = 0 \\ x^2+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

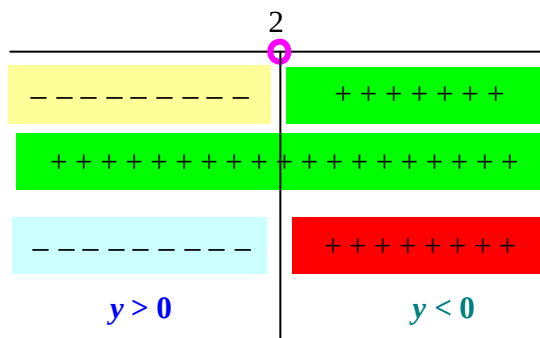
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 2 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow B = (2, 0) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow -x^3 + 2x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow -(x-2)(x^2+1) > 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+1) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{sempre (è una somma di due quadrati)} \end{cases}$$



Dunque si ha:

$$y > 0 \text{ per } x < 2$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D(-x^3 + 2x^2 - x + 2) = -3x^2 + 4x - 1$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x - 1 > 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0$$

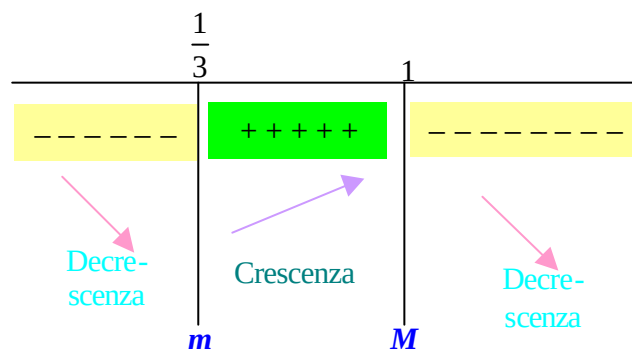
Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione utilizzando la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \cong 0,3 \text{ ed } x_2 = \frac{2+1}{3} = 1$$

da cui:

$$3x^2 - 4x + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

cambiando il segno ed invertendo
il verso della disequazione



Dunque la funzione ha un minimo in $x = \frac{1}{3}$ ed un massimo in $x = 1$.

In particolare:

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \cong 1,85$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -(1)^3 + 2(1)^2 - (1) + 2 = 2$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,3;1,85)$ è il punto di *minimo*

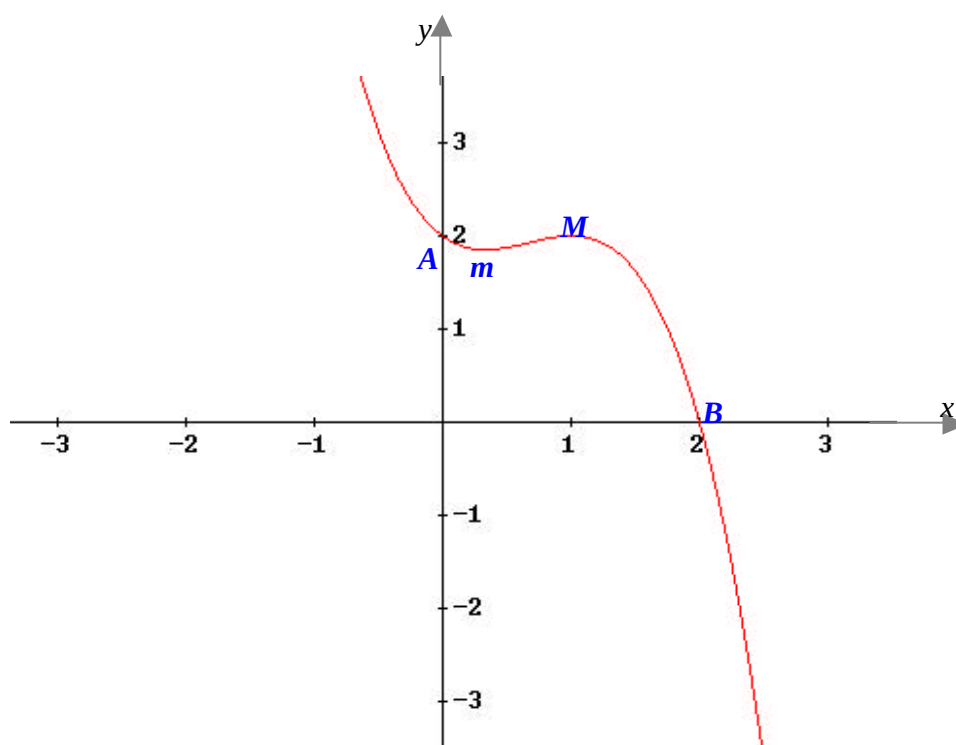
$M(1;2)$ è il punto di *Massimo*

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO



Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

5) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \neq 0\}$$

Occorre, pertanto, trovare le soluzioni dell'equazione associata a tale disuguaglianza. Risulta:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = +1$$

motivo per cui, essendo $\Delta = 0$, trattandosi del quadrato di un binomio, l'equazione è soddisfatta per $x = 1$, ovvero la disuguaglianza è soddisfatta per $x \neq 1$. Ne segue, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +1, +1 < x < +\infty\}$$

cioè la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale per la funzione:

$$A.V. : x = 1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x+1}{x^2-2x+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } x$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

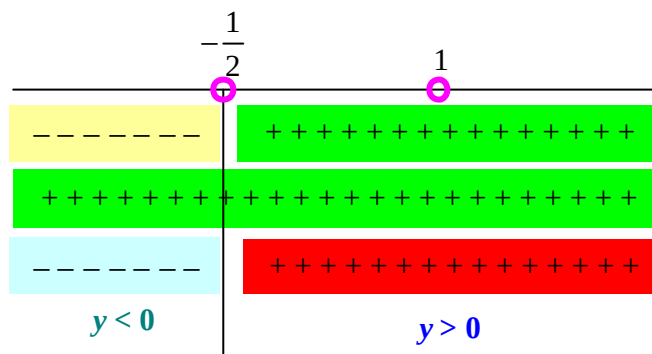
02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2-2x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x^2-2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \text{sempre (quadrato di un binomio)} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \text{ per } x > -\frac{1}{2}, x \neq 1$$

Osserviamo, infatti, che la funzione data in $x=1$ ammette un asintoto verticale in quanto non è definita!!!

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2-2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$$

cioè la retta di equazione $y=0$, ovvero l'asse delle x , è un asintoto orizzontale per la funzione:

$$\text{A.O.: } y=0$$

Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D\left(\frac{2x+1}{x^2-2x+1}\right) = \frac{2 \cdot (x^2-2x+1) - (2x+1) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 4x^2 + 4x - 2x + 2}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2-2x+1)^2}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 - 2x + 1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 > 0 \\ (x^2 - 2x + 1)^2 > 0 \end{cases}$$

Poiché risulta:

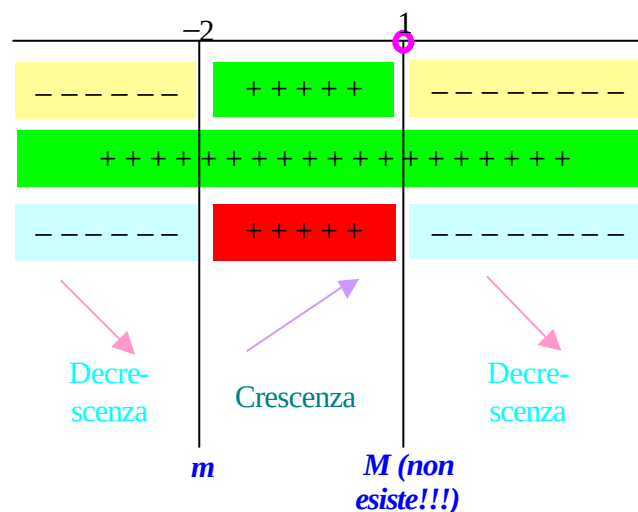
$$-2x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ ed } x_2 = \frac{-1+3}{2} = +1$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 > 0 \\ (x^2 - 2x + 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 < 0 \\ (x^2 - 2x + 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ (x^2 - 2x + 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



I Parziale - Compito C

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione ha un minimo in $x = -2$.

In particolare si ha:

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2 - 2(-2)+1} = -\frac{1}{3} \cong -0,33$$

Ne segue, quindi, che:

$m(-2; -0,33)$ è il punto di *minimo*

Osservazione

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Infatti il sistema, già risolto precedentemente effettuando le intersezioni con gli assi cartesiani:

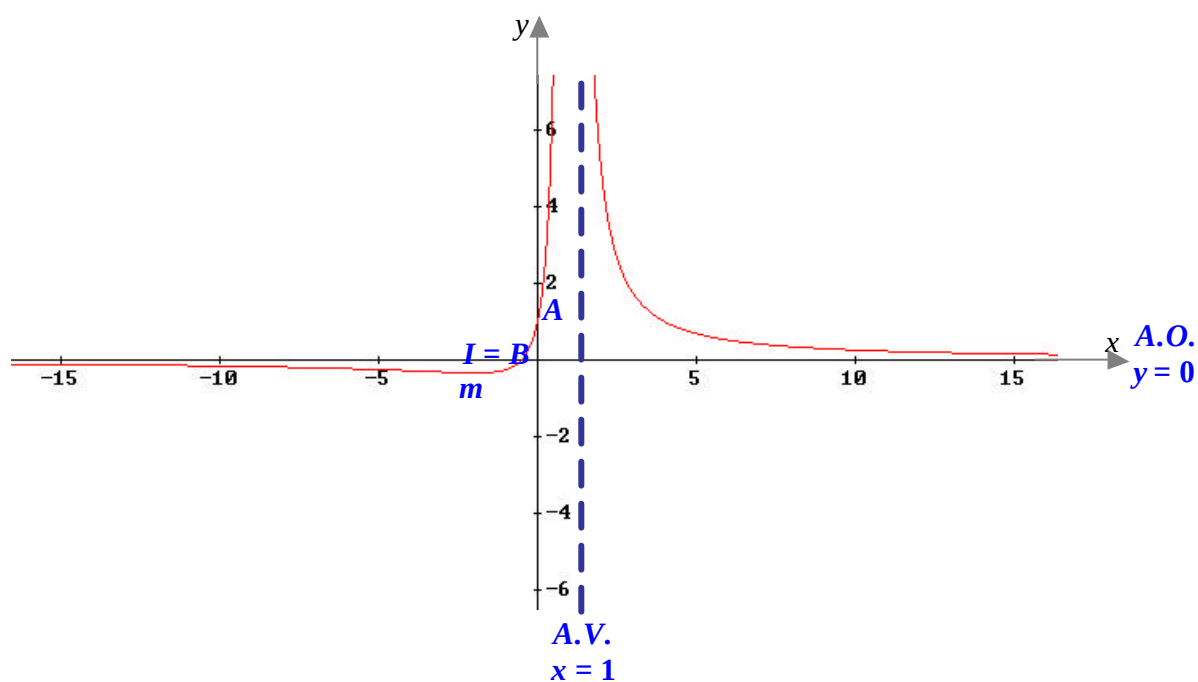
$$\begin{cases} y = \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2-2x+1} = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ammette come soluzioni esattamente il punto $I = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \equiv B$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO



Prof.ssa Daniela Tondini